和算に現れたVillarceau circles (数学史の研究)

直井, 功; 小寺, 裕

数理解析研究所講究録 1444 巻 2005 年 203-208

和算に現れた Villarceau circles

近畿数学史学会　直井　功 (Isao Naoi)
東大寺学園　小寺　裕 (Hiroshi Kotera)

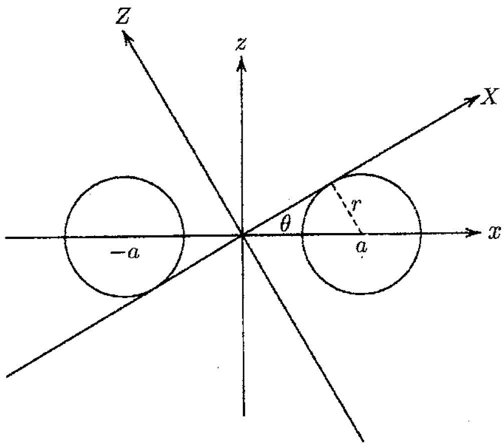
1　Villarceau circles

xyz 座標での torus T の方程式を

$$T : (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2 \cdots\cdots ①$$

とかく．下図のように新たな座標系 $(X,\ Y,\ Z)$ を導入する．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \cdots ②$$



② を ① に代入して

$$(a - \sqrt{(X\cos\theta - Z\sin\theta)^2 + Y^2})^2 + (X\sin\theta + Z\cos\theta)^2 = r^2$$

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2\{(X\cos\theta - Z\sin\theta)^2 + Y^2\}$$

この torus の XY 平面での切り口を求めるために，$Z = 0$ とおくと

$$(X^2 + Y^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(X^2\cos^2\theta + Y^2)$$

$\cos^2\theta = \dfrac{a^2 - r^2}{a^2}$ を代入して

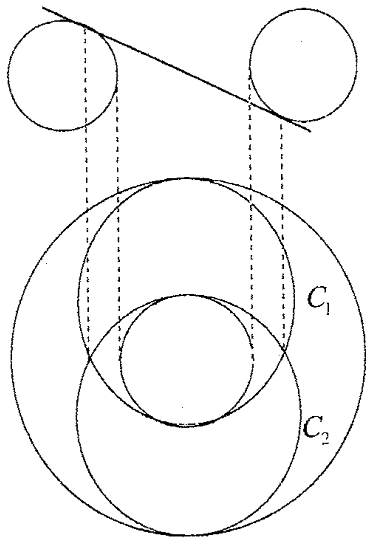
$$(X^2 + Y^2 + r^2 - a^2)^2 - 4r^2Y^2 = 0$$

$$\{X^2 + (Y - r)^2 - a^2\}\{X^2 + (Y + r)^2 - a^2\} = 0$$

よって，torus T の XY 平面での切り口は次の 2 円 C_1, C_2 となる．

$$C_1 : X^2 + (Y - r)^2 = a^2, \quad C_2 : X^2 + (Y + r)^2 = a^2$$

この 2 円 C_1, C_2 を Villarceau[1]の円 (1848) という．

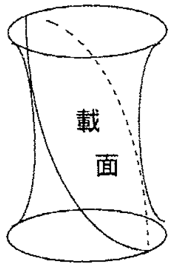


2 算法求積通考

内田久命編「算法求積通考」(1844) 巻之三第 39 問

今有減弧檮如圖斜截之檮徑若干高若干問得最少截面積及周術如何

図のような減弧柱 (円柱の側面が円弧になったものでトーラスの孔の部分．円柱の高さと直径が与えられている) を斜めに切るとき，断面積の最小値はいくらか．



一対の子午線に内側から接する平面で切断するするとき (断面積が最小で) その切り口が円になることを次のように説明している．

高さを n 等分する．中径 $= 2r$, 大径 $= 2a$, 小径 = 円柱の直径 とする． (fig.1)

$$中^2 - \left(\frac{k}{n}高\right)^2 = (中_k)^2 \cdots\cdots ① \qquad (QR = \frac{k}{n}高で \triangle PQRに勾股弦術)$$

$$大 - 中_k = 小_k \cdots\cdots ② \qquad (PS = 大径)$$

$$平_k = \frac{k}{n}小 = 天小 \cdots\cdots ③$$

[1]Antoine Joseph Francois Yvon Villarceau(1813-1889), *Comptes rendus*, 1848

とする．$小_k^2 - 平_k^2 = 弦_k^2$ (fig.2) だから これに ② ③ を代入して

$$(大 - 中_k)^2 - 天^2小^2 = 弦_k^2$$

$$大^2 - 2大 \cdot 中_k + 中_k^2 - 天^2小^2 = 弦_k^2$$

① を代入して

$$大^2 - 2大 \cdot 中_k + 中^2 - 天^2高^2 - 天^2小^2 = 弦_k^2$$

$高^2 + 小^2 = 弦^2$ だから

$$大^2 - 2大 \cdot 中_k + 中^2 - 天^2弦^2 = 弦_k^2$$

$大 : 大_k = 中 : 中_k$ すなわち $大 \cdot 中_k = 中 \cdot 大_k$ となるように $大_k$ を定義すると，

$$大^2 - 2中 \cdot 大_k + 中^2 - 天^2弦^2 = 弦_k^2$$

また $大^2 - 天^2弦^2 = 大_k^2$ だから （$\because$ fig.3 で $EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n}弦 = \frac{1}{2}天弦$，$\triangle F'GH$ に勾股弦術 ）

$$大_k^2 - 2中 \cdot 大_k + 中^2 = 弦_k^2$$

$$\therefore \quad 弦_k = 大_k - 中$$

これは 2 $矢_k$ と同じであるので截面半は円弧である．而してその直径は大径である．

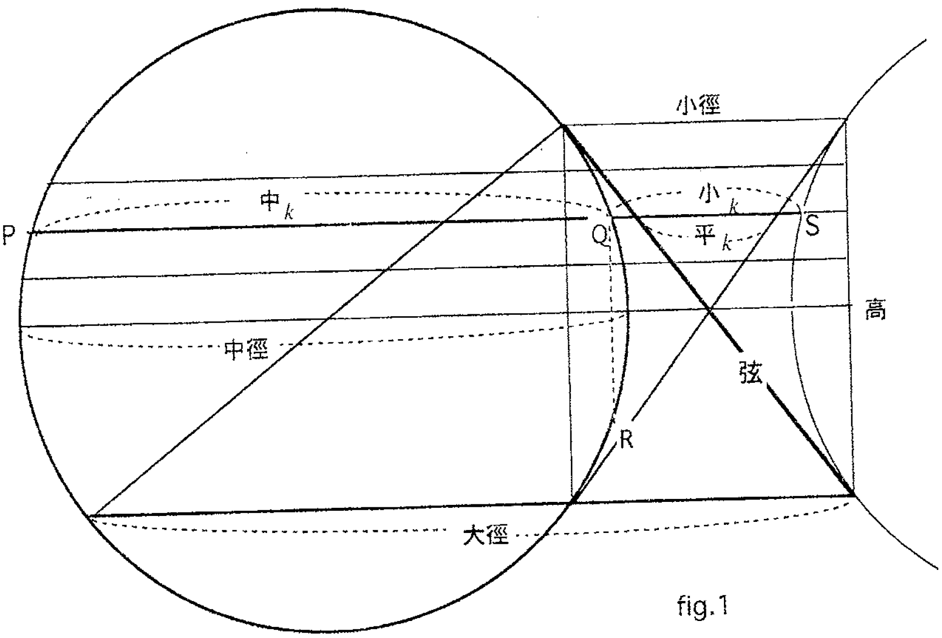


fig.1

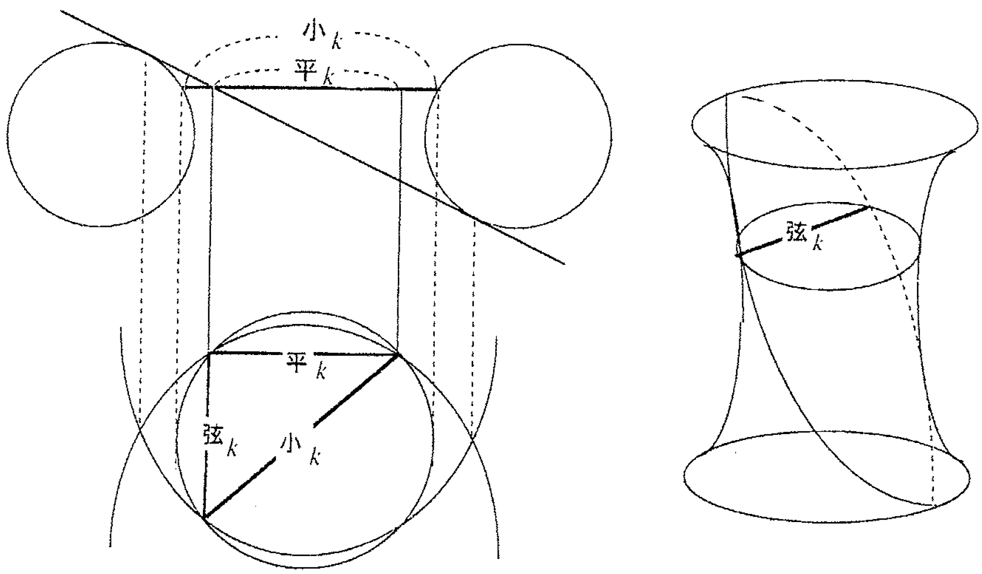


fig.2

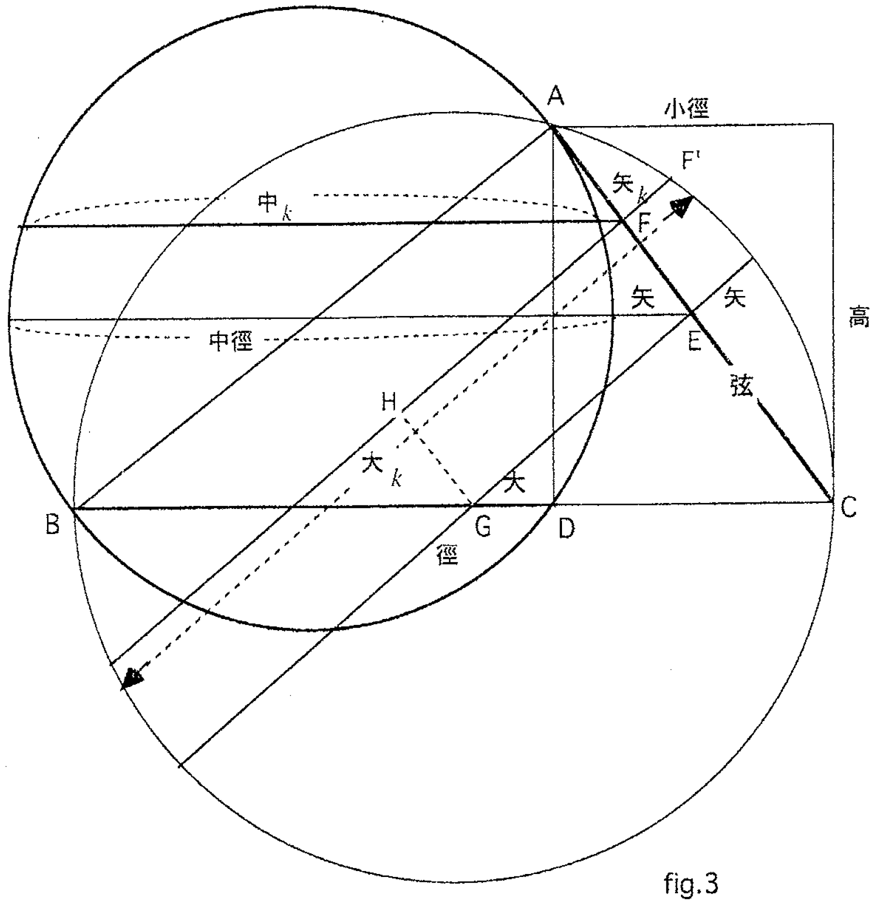


fig.3

3 ルーシェ・コンブルース

ルーシェ・コンブルース の "Traité de Géométrie" (1900) に Villarceau 円 の初等的証明がある.

今接平面 AC による切り口の曲線上の点を X とし，この点を過ぎる緯面の半径を UN とすれば $EX = EN$ となる．この接平面を AC を軸に 90° 回転して X が F' に来たとすると $EF' = EN$ である．F' から AE に下ろした垂線の足を M，WN の延長が AE と交わる点を S，E から WS に下ろした垂線の足を T とする．

$\triangle ETS \sim \triangle WAS$, $MN \parallel EW$ より

$ET : WA = SE : SW = EM : WN = EM : WA$

$$\therefore \quad ET = EM$$

従って $\triangle EF'M \equiv \triangle ENT$

そこで，$KE \perp AE$, $KE = WN = r$ となるように K をとると $\angle KEF' = \angle ENW$ だから

$$\triangle KEF' \equiv \triangle ENW$$

$$\therefore \quad KF' = EW = a$$

よって F' は K を中心に 半径 a の円を描く．

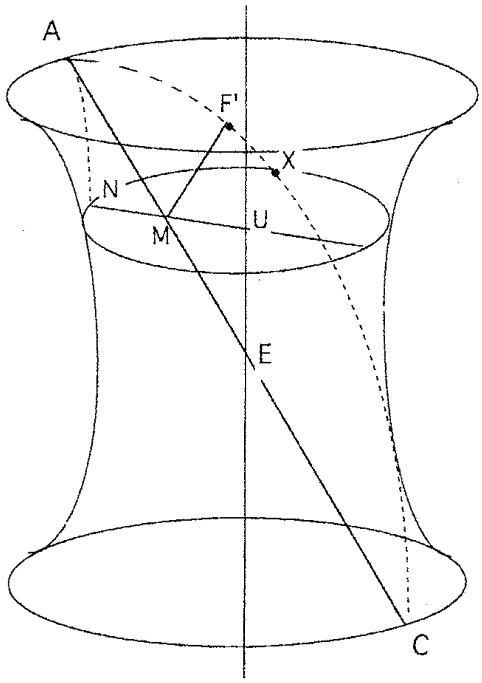


fig.4

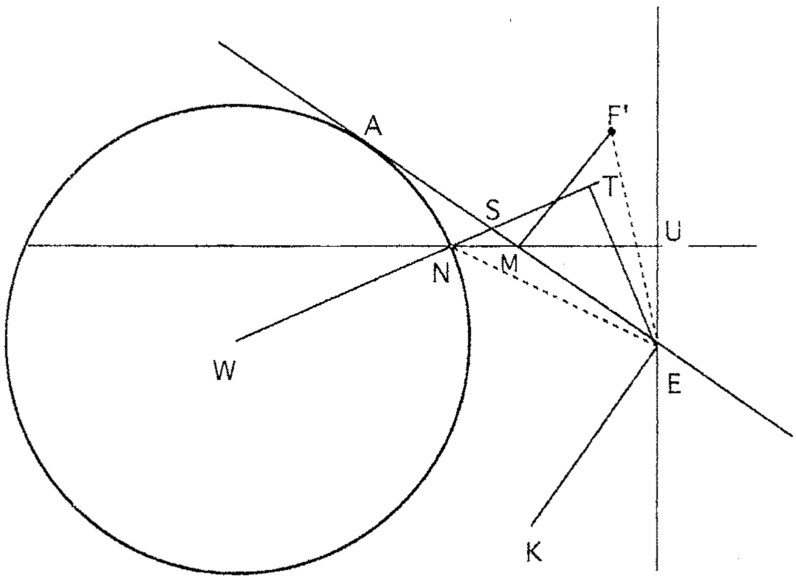


fig.5

4 Villarceau の証明[2]

xyz 座標での torus T の方程式 ① に 断面の方程式 $z = \alpha x \cdots\cdots$ ② を代入すると

$$\left\{(1+\alpha^2)x^2 + y^2 + a^2 - r^2\right\}^2 = 4a^2(x^2+y^2)$$

これを極座標 $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ に変換して,

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2\rho^2\cos^2\varphi - r^2 = 2a\rho$$

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2\rho^2 - 2a\rho - r^2 = \alpha^2\rho^2\sin^2\varphi$$

② が接平面のときは $\alpha = \tan\theta = \dfrac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$ を代入して

$$a^2 - r^2 - \rho a = \pm r\rho\sin\varphi$$

これを直行座標に戻すと

$$a^2x^2 + (a^2-r^2)(y\pm r)^2 = a^2(a^2-r^2)$$

すなわち楕円

$$\frac{x^2}{a^2-r^2} + \frac{(y\pm r)^2}{a^2} = 1$$

となる. これは求める曲線を xy 平面に projection したものだから断面上の曲線は円である.

参考文献

[1] Z.A. Melzak *Invitation to Geometry* 1983 John Wiley & Sons

[2] M.Berger *Geometry I, II* 1987 Springer-Verlag

[3] 内田久命編 『算法求積通考』 天保 15 年 (1844) 小寺裕蔵

[4] ルーシェ・コンブルース, 小倉金之助訳 初等幾何学 1915 山海堂書店

[5] Y. Villarceau *THEOREME SUR LE TORE* Nouvelles Annales mathematiques 7 , 345-347 , 1848

[2]Y. Villarceau[5] による